7.4.4 Obecná rovnice roviny I

Předpoklady: 7403

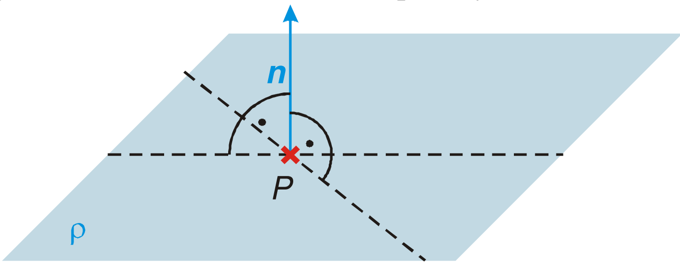
V minulé hodině jsme vytvořili parametrické vyjádření roviny $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}, t \in R, s \in R$.
Zjišťovat z parametrického vyjádření roviny totožnost nebo rovnoběžnost není žádný med $\Rightarrow$ zkusíme najít jiný způsob vyjádření roviny.

Víme:

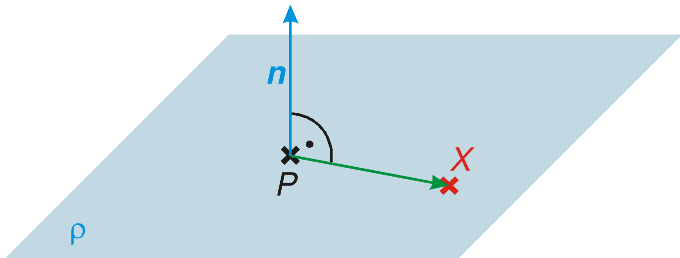
- v prostoru neexistuje obecná rovnice přímky (předminulá hodina, spousta důvodů),
- rovnice $z = 0$ (podobná obecné rovnici přímky v rovině) je rovnicí souřadné roviny xy

$\Rightarrow$ zkusíme vytvořit obecnou rovnici roviny v prostoru.

Jiný způsob zadání roviny: směr, který je k rovině kolmý (normálový směr, s jeho pomocí jsme odvodili obecnou rovnici přímky v rovině), a bod.



Jak poznáme, že bod X leží v rovině ρ?



Vektor $X - P$ je kolmý na normálový vektor $\boldsymbol{n}$ $\Rightarrow$ jejich skalární součin je nulový:
$(X - P) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ (stejně jako při odvozování obecné rovnice přímky).

Př. 1: Je dán bod P a vektor $\boldsymbol{n}$. Najdi rovnici, kterou splňují body roviny, která prochází bodem P a má normálový vektor $\boldsymbol{n}$. Příklad řeš nejdříve konkrétně pro bod $P[-2;3;2]$ a vektor $\boldsymbol{n} = (1;-1;4)$ a poté obecně do dvou sloupců vedle sebe.

Body: $X[x;y;z]$, $P[-2;3;2]$.
Vektory: $(X - P) = (x+2; y-3; z-2)$,
$\boldsymbol{n} = (1;-1;4)$.
Skalární součin je nulový: $(X - P) \cdot \boldsymbol{n} = 0$.
$(x+2; y-3; z-2)(1;-1;4) = 0$
$1 \cdot (x+2) - 1 \cdot (y-3) + 4(z-2) = 0$

Body: $X[x;y;z]$, $P[p_1;p_2;p_2]$.
Vektory: $(X - P) = (x - p_1; y - p_2; z - p_3)$,
$\boldsymbol{n} = (a;b;c)$.
Skalární součin je nulový: $(X - P) \cdot \boldsymbol{n} = 0$.
$(x - p_1; y - p_2; z - p_3)(a;b;c) = 0$
$a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$

$x+2-y+3+4z-8=0$
$x-y+4z-3=0$

$ax-ap_1+by-bp_2+cz-cp_3=0$
$ax+by+cz-ap_1-bp_2-cp_3=0$
$ax+by+cz+d=0$

- Ke každé rovině ρ v prostoru lze najít taková čísla *a*, *b*, *c*, *d* aby $X[x;y;z]\in\rho$ právě když $ax+by+cz+d=0$.
- Pro každou čtveřici reálných čísel *a*, *b*, *c*, *d*, kde alespoň jedno z čísel *a*, *b*, *c* je nenulové, je množina všech bodu $X[x;y;z]$, pro které platí $ax+by+cz+d=0$, rovina.

Rovnice $ax+by+cz+d=0$, kde alespoň jedno z čísel *a*, *b*, *c* je nenulové, se nazývá **obecná rovnice roviny**. Čísla *a*, *b*, *c* jsou souřadnice normálového vektoru $\boldsymbol{n}=(a;b;c)$ této roviny, číslo *d* získáme dosazením libovolného bodu roviny do rovnice.

Př. 2: Najdi obecnou rovnici roviny σ, která je rovnoběžná s rovinou ρ z předchozího příkladu a prochází bodem $S[1;3;-2]$. Porovnej rovnice obou rovin.

Rovina je rovnoběžná $\Rightarrow$ musí mít stejný normálový vektor (nebo násobek normálového vektoru) jako rovina ρ.

$\boldsymbol{n}=(1;-1;4)$ $\Rightarrow$ rovnice $x-y+4z+d=0$

Dosadíme bod $S[1;3;-2]$: $1-3+4(-2)+d=0$.

$d=10$

$\sigma: x-y+4z+10=0$

Př. 3: Najdi obecnou rovnici roviny *ABC*: $A[2;1;3]$, $B[3;3;1]$, $C[1;2;5]$. Dosazením všech bodů do rovnice zkontroluj správnost výsledku.

Problém: nemáme normálový vektor.
Co máme?
Tři body, z nichž můžeme spočítat dva směrové vektory, které nejsou rovnoběžné, normálový vektor je na oba kolmý $\Rightarrow$ normálový vektor můžeme spočítat pomocí vektorového součinu.
Určíme dva směrové vektory:

$\boldsymbol{u}=B-A=(1;2;-2)$

$\boldsymbol{v}=C-A=(-1;1;2)$

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(4+2;2-2;1+2)=(6;0;3)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}=(2;0;1)$

Rovnice: $2x+z+d=0$.
Dosadíme bod *A*: $2\cdot2+0\cdot1+3+d=0$ $\Rightarrow$ $d=-7$.
Rovina *ABC* má rovnici: $2x+z-7=0$.
Zkusíme další body: $B[3;3;1]$: $2\cdot3+1-7=0$ $\qquad$ $C[1;2;5]$: $2\cdot1+5-7=0$.

Př. 4: Najdi obecnou rovnici roviny ρ, která je kolmá na přímku $p=\{[1-t;3-2t;3t];t\in R\}$ a prochází bodem $A[1;2;3]$. Urči, zda v rovině ρ leží body $K[0;2;-2]$ a $L[-2;1;3]$.

Rovina ρ je kolmá na přímku $p \Rightarrow$ směrový vektor přímky p je normálovým vektorem roviny $\rho \Rightarrow \boldsymbol{n}_\rho=(1;2;-3)$.
Rovnice roviny: $x+2y-3z+d=0$.
Dosadíme bod $A[1;2;3]$: $1+2\cdot2-3\cdot3+d=0 \Rightarrow d=4$.
$\rho: x+2y-3z+4=0$.
Dosadíme bod $K[0;2;-2]$: $0+2\cdot2-3\cdot(-2)+4=14\neq0 \Rightarrow$ bod K neleží v rovině ρ.
Dosadíme bod $L[-2;1;3]$: $-2+2\cdot1-3\cdot3+4=-5\neq0 \Rightarrow$ bod L neleží v rovině ρ.

Př. 5: Najdi obecnou rovnici roviny ABC: $A[1;1;-2]$, $B[1;3;-3]$, $C[0;1;1]$. Dopočítej souřadnice bodů $M[0;?;2]$ a $N[?;1;?]$ tak, aby oba body ležely v rovině ABC.

Normálový vektor získáme vektorovým součinem dvou směrových vektorů roviny.
$\boldsymbol{u}=B-A=(0;2;-1)$
$\boldsymbol{v}=C-A=(-1;0;3)$
$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(6-0;1-0;0-(-2))=(2;1;2) \Rightarrow \boldsymbol{n}=(6;1;2)$
Rovnice: $6x+y+2z+d=0$.
Dosadíme bod $C[0;1;1]$: $6\cdot0+1+2\cdot1+d=0 \Rightarrow d=-3$
Obecná rovnice roviny ABC: $6x+y+2z-3=0$.
Dosadíme bod $M[0;y;2]$: $6\cdot0+y+2\cdot2-3=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow$ souřadnice bodu $M[0;-1;2]$.
Dosadíme bod $N[x;1;z]$: $6x+1+2z-3=0 \Rightarrow 3x+z=1 \Rightarrow$ nekonečně mnoho možností pro souřadnice bodu $N \Rightarrow$ zvolíme souřadnici x a z dopočítáme $x=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow$ souřadnice bodu $N[0;1;1]$.

Dodatek: Volbu hodnoty x-ové souřadnice můžeme provést také obecně a získat tak všechna možná řešení pro hledání souřadnic bodu N: $x=t \Rightarrow z=1-3t \Rightarrow$ souřadnice bodu $N[t;1;1-3t], t\in R$. Nalezené body tvoří přímku ležící v rovině ABC.

Př. 6: Najdi průsečík roviny $\rho: 2x+y+2z-2=0$ s přímkou $p=\{[1+t;-2;3-2t],t\in R\}$.

Průsečík – bod, který vyhovuje rovnicím obou útvarů $\Rightarrow$ řešíme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned} x&=1+t\\ y&=-2\\ z&=3-2t \end{aligned} \Rightarrow \text{dosadíme z prvních tří rovnic do čtvrté rovnice.}$$

$2x+y+2z-2=0$
$2(1+t)-2+2(3-2t)-2=0$

$2+2t-2+6-4t-2=0$
$4-2t=0 \Rightarrow t=2$
Dopočteme souřadnice průsečíku:
$x=1+t=1+2=3$

$y=-2$

$z=3-2t=3-2\cdot 2=-1$

Přímka p se s rovinou ρ protíná v bodě $P[3;-2;-1]$.

Př. 7: Jsou dány přímky $p=\{[1-t;3-2t;3t];t\in R\}$ a $q=\{[-t;3;2+t].t\in R\}$. Najdi obecnou rovnici roviny ρ, která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q.

K sestavení obecné rovnice roviny potřebujeme normálový vektor a bod (nejlepší případ) nebo dva směrové vektory a bod.

- Rovina obsahuje přímku $p \Rightarrow$ směrový vektor přímky p je také směrovým vektorem roviny.
- Rovina je rovnoběžná s přímkou $q \Rightarrow$ směrový vektor přímky q je také směrovým vektorem roviny.

$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_p=(-1;-2;3)$

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_q=(-1;0;1)$

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(-2-0;-3+1;0-2)=(-2;-2;-2) \Rightarrow \boldsymbol{n}=(1;1;1)$

Rovnice: $x+y+z+d=0$.

Dosadíme bod $P[1;3;0]$: $1+3+0+d=0 \Rightarrow d=-4$

Obecná rovnice roviny $\rho: x+y+z-4=0$.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu jsou tradičně největší problémy s představou o zadání. Snažím se, aby si studenti samostatně bez mého vybízení situace modelovali pomocí tužek a sešitů.

Př. 8: Petáková:
strana 115/cvičení 19 a) c)
strana 116/cvičení 20 a)

Shrnutí: Rovinu v prostoru můžeme popsat pomocí obecné rovnice $ax+by+cz+d=0$. Tato rovnice má analogické použití jako obecná rovnice přímky v rovině.